増補改訂版にあたり

本書は 2017 年に出版されたものを増補改訂したものです．著者が岡山県立大学情報工学部で担当している講義のために作成したテキストを元に執筆しました．初版では一部粗削りな記述が見受けられましたが，今回，必要な改良と内容の追加を行いました．教科書および参考書として，より使いやすくなりました．

主な改良点は以下の通りです．

- 新しい章として「第 8 章 電波伝搬」を追加しました．無線通信の品質を決める上で，アンテナから放射された電波の空間における伝搬現象は重要であり，その基本的な諸特性を解説しています．
- 初版にあった不適切な表現やわかりにくい文面，図を改良・修正しました．
- 学生からの質問に対する回答や必要な事項を加筆しました．

本書が多くの学生に電磁波工学への関心を持たせ，理解を深める一助になることを願っています．

2024 年 7 月　　著　　者

はじめに

電磁波工学は電磁波の工学的な利用を扱う学問分野です．電磁波は目には見えないため，マクスウェルの電磁方程式を基礎とし，少なからず数式を用いて，電磁波の現象を表記します．この表記が難しいという印象を持っている人が多いように感じます．確かに，電磁波工学では，やや複雑な数式を用いて説明することがあります．しかし，これは，電磁波工学に限ったことではなく，他の工学分野でも同じで，数式は現象や性質を理解する手助けになります．

そこで本書の執筆にあたり，なぜ，その数式になるのか，なぜ，その物理量になるのか，導出過程をできる限り省略せずに記述しました．必要な公式や知識は巻末ではなく，脚注に記述することにより，すぐに確認できるようにしました．数式の導出過程を覚える必要はありませんが，本書を読めば，どのような過程を経て，その数式が求められたかがわかり，式の意味である電磁波の現象を理解できます．

本書は，マクスウェルの方程式に至るまでの電磁気学の法則と定理を一通り学び終え，これから，電磁波工学の基礎と電磁波の利用技術の基礎を学ぶ方を対象とした入門書です．大学の通信系学部生の上級学年を対象としたテキストです．

本書の内容は，電磁波工学全てを網羅してはいません．電磁波工学の基礎を習得するために，最も基本的な電磁波の現象である平面波の伝搬，反射，透過と電磁波の放射の記述に重点をおいています．電磁波の現象を説明する際，電磁界成分と座標系の取り方については，必然性に基づいて記述し，電磁波の反射，透過は，近年の研究活動における考え方を取り入れて説明しています．電磁波の利用技術については，送受信機とアンテナを接続する給電線，代表的なアンテナとその基本的な特徴，アンテナを利用するための基礎的な知識を記述しています．詳細な特徴や多くのアンテナについては専門書に譲ります．本書を通して，電磁波工学，実際のアンテナに興味を持たれた読者には，さらに，専門書，実用書を読まれることを期待します．

2017 年 7 月　　著　　者

目次

第 1 章　電磁波の基礎 5
1.1　電磁波である電波 5
1.2　電磁波の呼称 6
1.3　電磁波を表す物理量 6
1.4　マクスウェルの方程式 8
1.5　境界条件 11

第 2 章　平面波 13
2.1　波動方程式 13
2.2　正弦波振動する電磁波 14
2.3　ポインティング電力 15
2.4　平面波の伝搬 16
2.5　偏波 23
演習問題 24

第 3 章　給電線と整合 25
3.1　分布定数回路 25
3.2　無損失線路 30
3.3　給電線と各定数 33
3.4　導波管 37
3.5　整合回路 42
演習問題 46

第 4 章　平面波の反射と透過 47
4.1　平面境界における反射と透過 47
4.2　全反射と無反射 51
4.3　円偏波の場合 53
4.4　3 層媒質による反射と透過 54
4.5　多層媒質への応用 57
4.6　回折現象 59
演習問題 61

第 5 章　電磁波の放射 63
5.1　波源からの電磁波の放射 63
5.2　微小ダイポールから放射される電磁界 64
5.3　微小ダイポールの放射特性 66

5.4　微小ループから放射される電磁界 69
5.5　開口面アンテナ 71
5.6　キルヒホッフ–ホイヘンスの式 75
演習問題 78

第 6 章　アンテナの基礎 79
6.1　半波長アンテナ 79
6.2　1/4 波長垂直接地アテナ 85
6.3　アンテナの利得 86
6.4　その他の諸量 88
6.5　受信アンテナ 90
6.6　配列アンテナ 93
演習問題 96

第 7 章　アンテナの利用 99
7.1　回線設計 99
7.2　回折現象とフレネルゾーン 101
7.3　アンテナの分類 104
7.4　線状アンテナ 105
7.5　開口面アンテナ 110
7.6　平面アンテナ 113
演習問題 116

第 8 章　電波伝搬 117
8.1　電波伝搬の概要 117
8.2　地上波伝搬 119
8.3　対流圏伝搬 124
8.4　電離層伝搬 130
8.5　フェージング 136
演習問題 137

参考文献 139

演習問題解答例 141

索引 155

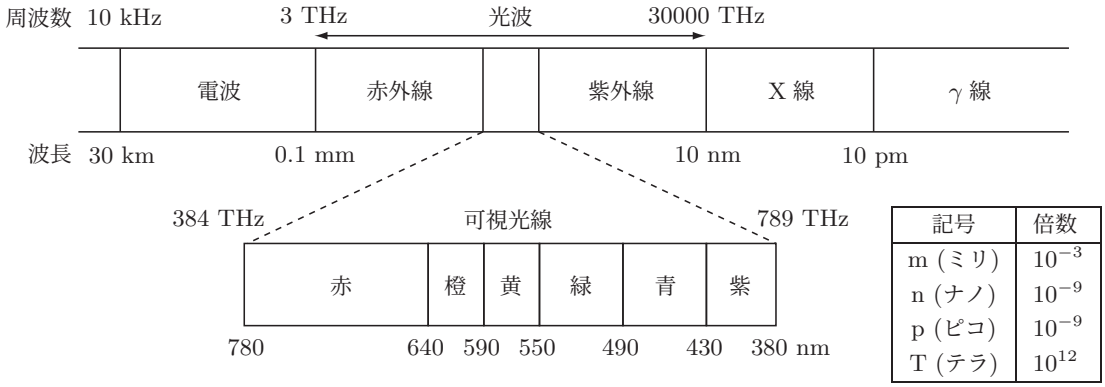
第 1 章

電磁波の基礎

アンテナを経て空間を伝搬する電波，光ファイバー内を伝搬する光波は電磁波であり，電磁波は目には見えない．電磁波は周波数ごとに用途が異なり，呼称が定められている．マクスウェルは電磁波の存在を予言し，電磁波に成立する電磁法則を 4 つの方程式としてまとめた．本章では，電波と電磁波に関する基礎事項と呼称，電磁波を扱う上で出発点となるマクスウェルの方程式について述べ，異なる媒質の境界で電磁波が満たす境界条件を導出する．

1.1 電磁波である電波

電波 (radio wave) は電界と磁界が振動して，空間や媒質中を伝搬する **電磁波** (electromagnetic wave) の一種である．**光波** (optical wave) も同じ電磁波の一種であり，数式的にも同じように扱われる．電磁波は **周波数** (frequency) により性質が異なる．図 1.1 のように，周波数の低い方，**波長** (wavelength) の長い方から電波，光波，X **線**，γ **線**と分類される．さらに，光波は赤外線，可視光線，紫外線に分類される．地表に届く太陽の放射エネルギーは約 300 〜 3000 [nm] であり，そのエネルギーの約半分が含まれる可視光線 380 〜 780 [nm] はヒトの目で見ることができる．これは太陽の下，ヒトは進化したためと考えられている．



記号	倍数
m (ミリ)	10^{-3}
n (ナノ)	10^{-9}
p (ピコ)	10^{-9}
T (テラ)	10^{12}

図 1.1　電磁波の周波数とその分類

無線通信の元になる電磁波について，その存在を示唆したのはイギリスのマクスウェルである．マクスウェルは 1864 年，電磁気学の諸法則が 4 つの式にまとめられることを示して，光が電磁波であることを唱えた．その後，ヘルツが 1888 年に電波の存在を実験的に証明した．ヘルツの実験に書籍を通じて興味を持ったイタリアのマルコーニは 1895 年 に初めて 1.5 [km] ではあるが，無線通信に成功した．マルコーニは無線会社を設立し，1899 年，ドーバー海峡 51 [km] 間の英仏通信に成功した．1901 年には，大西洋横断無線通信の実験を行い，長距離通信の手段として電波の実用性を示した．マルコーニによる無線通信の実用化以来，電波は世界を大きく変えてきた．

1.2　電磁波の呼称

周波数が 10 [kHz] 以上 3 [THz] (テラヘルツ) 以下の電磁波は電波と呼ばれ，それより高い周波数の電磁波は光波としている．電波は周波数や波長によって用途が異なる．図 1.2 に，周波数帯ごとの呼称と身近にある電波の使用例を示している．各周波数帯は下限を含まず，上限を含む．1 [GHz] より高い周波数は慣用的に **マイクロ波** (microwave) 帯[*1] と呼ばれ，図中に示すように，L バンド，X バンドなど，さらに細かく呼ばれている．

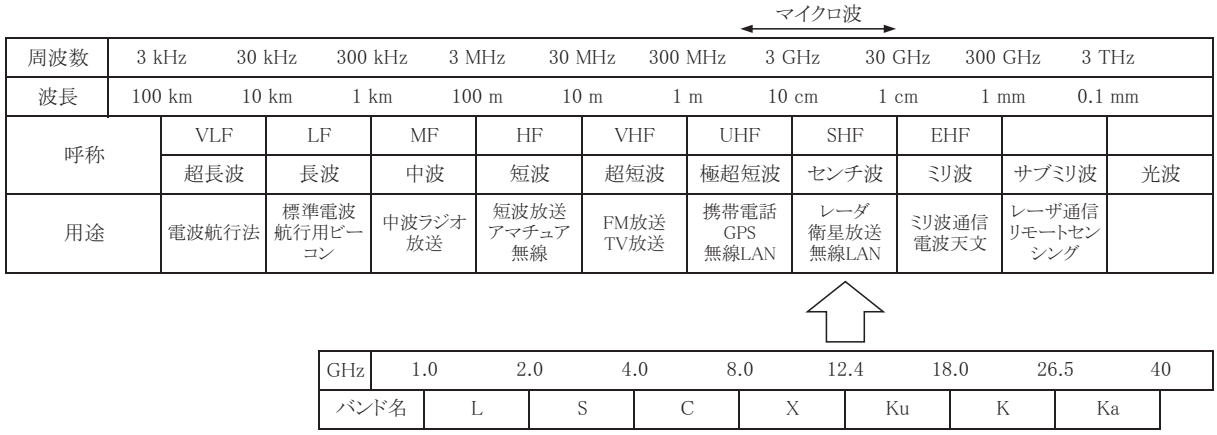


図 1.2　電磁波の呼称

真空中の電磁波の伝搬速度は全て，光の速度と同じ $c = 299792458$ [m/s][*2] である．工学分野では，$c \approx 3.0 \times 10^8$ [m/s] に近似されて用いられることが多い．電磁波は波長によっても分類でき，アンテナの長さや光波はこの波長で表すことが多い．**周波数** f [Hz] と **波長** λ [m] は次式のような関係がある．

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad [\mathrm{m}] \tag{1.1}$$

波長や周波数を実際に計算するには，以下の式がよく用いられる．

$$\lambda\ [\mathrm{m}] = \frac{300}{f\ [\mathrm{MHz}]}, \qquad \lambda\ [\mathrm{mm}] = \frac{300}{f\ [\mathrm{GHz}]} \tag{1.2}$$

[**例題** 1]　(1)　電波周波数の上限 3 [THz] の波長を求めよ．
(2)　無線 LAN で使用されている周波数帯 2.4 [GHz] の波長を求めよ．

[**解答**]
(1)　式 (1.1) より $\lambda = \dfrac{3.0 \times 10^8}{3 \times 10^{12}} = 10^{-4}$ [m] $= 0.1$ [mm] が得られる．
(2)　式 (1.2) より $\lambda = \dfrac{300}{2.4\ [\mathrm{GHz}]} = 125$ [mm] が得られる．

1.3　電磁波を表す物理量

電磁波は **電荷** (electric charge)，**電流** (electric current) によって発生し，**電荷密度** ρ [C/m^3]，**電流密度** $\boldsymbol{J}$ [A/m^2] が波源となる．電磁波は **電界** (electric field) $\boldsymbol{E}$ [V/m]，**電束密度** (electric flux density) または **電気変位** (electric displacement) $\boldsymbol{D}$ [C/m^2]，**磁界** (magnetic field) $\boldsymbol{H}$ [A/m]，**磁束密度** (magnetic flux density)

[*1] マイクロ波帯は一意に定められた定義はない．
[*2] 1983 年に国際度量衡総会によりメートルを光速によって定義することになり，光速が定義された．

$\boldsymbol{B}$ [T] によって表される．通常，電磁界は特別な物質を除けば，電束密度と電界，磁束密度と磁界，電流密度と電界には，次式のような **構成方程式** (constitutive equation) が成立する．

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 + \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.3}$$

ここで，ε [F/m]，μ [H/m]，σ [S/m] (古くは [℧/m] と表す) をそれぞれ **誘電率** (permittivity または dielectric constant)，**透磁率** (permeability)，**導電率** (conductivity) といい，まとめて **媒質定数** (medium constant) と呼ばれる．また，$\boldsymbol{J}_0$ は外部から加えられた電流密度を表し，アンテナのように電磁波を励振する電流源が存在する場合に考慮される．電流源が存在しない場合は $\boldsymbol{J}_0 = 0$ であり，このとき，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{E}$ とがそれぞれ同じ方向で，かつ大きさが比例関係になっていることがわかる．このような **媒質** (medium) を **等方性** (isotropic)，**線形性** (linear)，**均一性** (homogeneous) 媒質といい，等方性，線形性，均一性媒質で満たされた無限空間は **自由空間** (free space) と呼ばれる．真空中，大気中など実用的に真空とみなせる空間は導電率 $\sigma = 0$ の自由空間として取り扱われる．

また，任意媒質の誘電率 ε，透磁率 μ は真空中の誘電率 ε_0，透磁率 μ_0 を用いて，

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{r}}\, \varepsilon_0, \qquad \mu = \mu_{\mathrm{r}}\, \mu_0 \tag{1.4}$$

のように表すことが多い．ε_{r}，μ_{r} はそれぞれ **比誘電率** (relative permittivity)，**比透磁率** (relative permeability) と呼ぶ．一般に，媒質の性質は誘電率 ε，透磁率 μ，導電率 σ によって定まるが，これらの定数は温度，周波数によって変化する．特に，電波領域と光波領域ではそれらはかなり異なる値を呈する．真空中の誘電率 ε_0 および透磁率 μ_0 の値は物理学上の重要定数であり，光速 c，インピーダンス Z_0 と合わせて，表 1.1 に示す．本書においては，計算の簡便さから真空中の透磁率は定義値[*3] を用い，真空中の誘電率とインピーダンスは光速を 3.0×10^8 [m/s] に近似した場合の値を用いる．なお，真空中の光速，インピーダンスは ε_0，μ_0 と次式のような関係が成立する．

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad [\mathrm{m/s}], \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad [\Omega] \tag{1.6}$$

本書では，電波領域において線形，等方性，均一性の媒質を考え，次のような無損失または損失の誘電体，導体を扱う．なお，誘電体の透磁率 μ はほぼ真空中の透磁率 μ_0 であり，比誘電率 $\mu_{\mathrm{r}} \approx 1$ である．

(a) **無損失媒質** (lossless media)

無損失誘電体

無損失誘電体は誘電率 ε が ε_0 以上の実数，導電率 $\sigma = 0$ の媒質である．電流密度 $\boldsymbol{J}\,(= \sigma \boldsymbol{E})$ は $\boldsymbol{0}$ となる．

完全導体

導電率 σ を無限大とした理想的な導体であり，2.4 (2) 項で述べるように，電波領域では，表皮の深さより厚い良導体の金属は 0 [Ω] の完全導体として取り扱われる．

表 1.1　真空中の定数

真空中の定数			定義値	概略値	光速を近似した場合
誘電率	ε_0	[F/m]	$\dfrac{1}{\mu_0 c^2}$	8.854×10^{-12}	$\dfrac{10^{-9}}{36\pi}$
透磁率	μ_0	[H/m]	$4\pi \times 10^{-7}$	1.257×10^{-6}	$\left(4\pi \times 10^{-7}\right)$
光速	c	[m/s]	299792458	2.998×10^8	3.0×10^8
インピーダンス	Z_0	[Ω]	$\mu_0 c$	376.7	120π

[*3] 2 本の無限長線導体に電流 I_1，I_2 が間隔 r で平行に流れているとき，それぞれの線の単位長さ当たりに働く力は

$$f = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} \quad [\mathrm{N}] \tag{1.5}$$

である．1 [m] の間隔の線導体に等しい電流を流し，2×10^{-7} [N] の力が働いたとき，その電流を 1 [A] と決めている．従って，式 (1.5) から真空中の透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] のように定義される．ε_0，Z_0 は人為的な定数であり，光速 c を用いて表 1.1 中の定義値のように表される．

(b) **損失媒質** (lossy media)

損失誘電体

次式のように誘電率が複素数で与えられ，導電率が有限な値を持つ誘電体.

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\varepsilon' = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \tag{1.7}$$

不完全導体

電波領域では，導体の厚さ d が表皮の深さに比べて十分薄い場合，次式のように表面抵抗 (surface resistance) R_{s} [Ω] が有限な値を持つ導体.

$$R_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\sigma d} \quad [\Omega] \tag{1.8}$$

実際の媒質は導電率 σ を考慮すべき損失媒質であるが，真空，絶縁体として知られているポリエチレンやテフロンは無損失誘電体，銅やアルミニウムは完全導体として扱われる．損失媒質では，誘電体の場合は複素誘電率，導体の場合は表面抵抗を用いて表される．誘電体として扱うか，導体として扱うかは 2.4 (2) 項で述べる.

1.4　マクスウェルの方程式

マクスウェルはファラデーのいだいていた電界や磁界に関する概念を統一し，広く電磁波に成立する基本式を数学的にまとめた．**マクスウェルの方程式** (Maxwell's equation) と称されている 4 つの方程式は，**ファラデーの電磁誘導の法則** (Faraday's law of induction)，**アンペアの周回積分の法則** (Ampere's law)，**ガウスの法則** (Gauss's law) から成り立っている．ここでは，4 つの方程式を順に示す.

(1) **ファラデーの電磁誘導の法則**

任意の閉路を C，その上の線素ベクトルを $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ とし，C で囲まれる曲面を S，その上の面素を $\mathrm{d}S$，および単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，図 1.3 に示す．ファラデーの電磁誘導の法則は，閉回路中を通過する磁束 (磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の面積分) が時間的に変化するとき，閉路には電界 $\boldsymbol{E}$ の線積分で与えられる起電力を生じることを意味し，

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.9}$$

のように表され，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と電界 $\boldsymbol{E}$ の関係を示している.

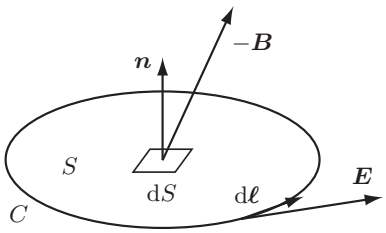


図 1.3　ファラデーの法則

(2) **アンペアの周回積分の法則**

アンペアの周回積分の法則は，磁界 $\boldsymbol{H}$ を閉路に沿って線積分した値がこの回路を流れる電流 I [A] に等しいことを示し，

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I \tag{1.10}$$

のように表される．但し，

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.11}$$

である．面素 $\mathrm{d}S$ における電流密度 $\boldsymbol{J}$ の法線方向成分と磁界 $\boldsymbol{H}$ の方向は右ねじの関係にある．図 1.4 のように，電流の法線方向を右ねじの進行方向としたとき，ねじの回転方向が磁界の向きになる．

マクスウェルは導体の中を流れる **導電電流** (conductive current) である $\boldsymbol{J}$ (密度) の他に，コンデンサの極板間のような誘電体中にも，電界が時間的に変動すれば，ここに一種の電流が流れると考え，**変位電流** (displacement current) と名付けて，変位電流密度

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{D}} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad [\mathrm{A/m^2}] \tag{1.12}$$

のように表し，変位電流も導電電流と同じように磁界を伴うことを仮定した．変位電流は，図 1.5 に示すようなコンデンサを含む回路を考えるとわかりやすい．この回路に交流電圧を加えると，回路には電流が流れるため，コンデンサ極板間の無損失誘電体中にも電流に相当するものが存在することになる．誘電体中に電界は生じるものの，導電率は $\sigma = 0$ であるため導電電流は流れない．誘電体中には，導電電流とは異なる変位電流が流れている[*4] と仮定すれば，この電流により磁界が発生することが説明できる．従って，電流は導電電流密度 $\boldsymbol{J}$ と変位電流密度 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ の面積分であると解釈でき，次式のように，導電電流および変位電流によって磁界が誘導される．

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{D}}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.14}$$

この式は **拡張されたアンペアの法則**と呼ばれる．

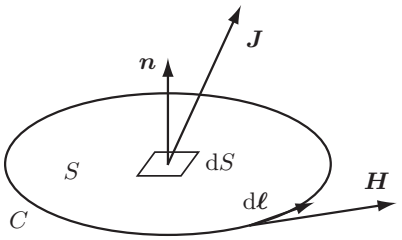


図 1.4　アンペアの周回積分の法則

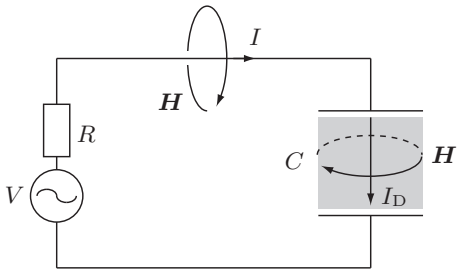


図 1.5　変位電流

[**例題** 2]　半径 a [m] の無限長円柱導体内を電流密度 J [A/m^2] で一様に電流が流れていると仮定する．円柱の中心から距離 r [m] の点における磁界強度 H [A/m] を求めよ．

[**解答**]　アンペアの周回積分の法則を用いて，式 (1.10) の左辺は $\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 2\pi r H$ となる．円柱外部 ($r > a$) では，右辺は式 (1.11) より $I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \pi a^2 J$ となるから，磁界強度は

$$H = \frac{\pi a^2 J}{2\pi r} = \frac{a^2 J}{2r} \quad [\mathrm{A/m}]$$

となる．一方，円柱内部 ($0 \le r \le a$) では，右辺は $I = \pi r^2 J$ となるから，磁界強度は次式で与えられる．

$$H = \frac{\pi r^2 J}{2\pi r} = \frac{rJ}{2} \quad [\mathrm{A/m}]$$

(3) ガウスの法則

図 1.6 のように，電荷密度 ρ [C/m^3] が空間に分布しているとき，その空間を包む表面 (閉曲面という) S，その内部を領域 V とする．このとき，電束密度に関するガウスの法則は，その表面から出てくる電束密度の総数が

[*4] 極板間の誘電体の誘電率 ε [F/m]，極板間距離 h [m]，極板面積 A [m^2] のコンデンサに交流電圧 $V(t)$ [V] を加えたとき流れる電流は

$$I_{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon A}{h}\frac{\mathrm{d}\{hE(t)\}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}A = J_{\mathrm{D}}A \quad [\mathrm{A}] \tag{1.13}$$

であり，変位電流 J_{D} [A/m^2] となる．ここで，キャパシタンス (静電容量) $C = \varepsilon A/h$ [F] である．

その内部に分布する電荷密度の総和 Q [C] に等しいことを示している．すなわち，

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_V \rho\,\mathrm{d}V = Q \tag{1.15}$$

である．一方，磁束密度に関するガウスの法則は，図 1.7 のように閉曲面 S を外方向に抜ける磁束の数は 0 であることを示している．これは，電荷に対応するような単極の磁荷は存在せず，磁力線が常に連続であって，閉じたループを形づくっていることを示している．

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0 \tag{1.16}$$

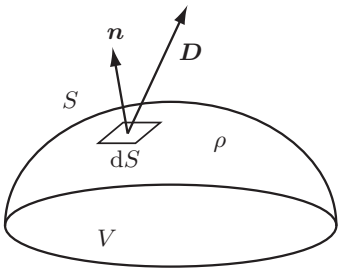


図 1.6　電束密度に関するガウスの法則

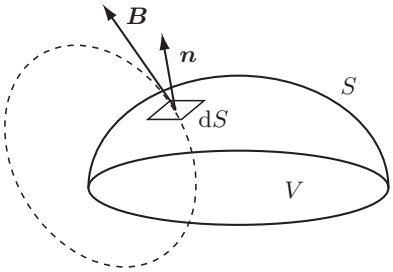


図 1.7　磁束密度に関するガウスの法則

(4) 微分形式

式 (1.9)，(1.14)，(1.15)，(1.16) は電磁波の基本法則であり，電磁波の現象をこの 4 つの式を用いて説明することができる．これらの式にベクトル解析における積分公式[*5] を利用すれば，**ナブラベクトル演算子**[*6] を用いて，次式のような微分形式のマクスウェルの方程式が得られる．

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.23}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.24}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \tag{1.25}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{1.26}$$

[*5] ストークスの積分定理は面積分と線積分の関係を表す定理で，次式のように表される．

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{1.17}$$

ガウスの積分定理は体積分と面積分の関係を表す定理で，次式のように表される．

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{1.18}$$

[*6] $\nabla\times$ は回転 (rotation, curl)，$\nabla\cdot$ は発散 (divergence) を表す．本書では ∇ 演算子を用い，rot，curl や div 記号を使用しない．直交座標系において，∇ 演算子，任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ をそれぞれ

$$\nabla = \boldsymbol{i}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{i}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{i}_z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_x A_x + \boldsymbol{i}_y A_y + \boldsymbol{i}_z A_z \tag{1.19}$$

とすると，$\boldsymbol{A}$ の回転と発散は次式のように定義される．

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\ (=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{i}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{i}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{1.20}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\ (=\mathrm{div}\boldsymbol{A}) = \left(\boldsymbol{i}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{i}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{i}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{i}_x A_x + \boldsymbol{i}_y A_y + \boldsymbol{i}_z A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.21}$$

また，∇ をスカラ場 $\varphi(x,y,z)$ に作用させたものは勾配と呼ばれ，次式のように定義される．

$$\nabla\varphi\ (=\mathrm{grad}\varphi) = \boldsymbol{i}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{i}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{i}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.22}$$

これらの演算の中で，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ だけスカラ場になる．

マクスウェルの方程式から次のことがわかる．今，媒質定数 ε，μ，$\sigma = 0$ の無損失媒質中にある導体 (アンテナ) に電流密度 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0$ の電流が流れると，式 (1.24) からその電流を取り巻く磁界 $\boldsymbol{H}$ が発生する．その磁界が時間的変化をすれば，式 (1.3) のように磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は磁界に比例するので，式 (1.23) から電界 $\boldsymbol{E}$ が発生する．その電界も時間的変化をし，電束密度 $\boldsymbol{D}$ は電界に比例するので，再び，式 (1.24) から磁界が発生する．以降，これを繰り返す．図 1.8 は一方向に限って図示したものである．

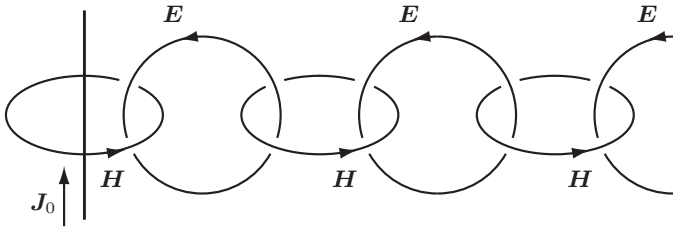


図 1.8　電磁波の放射と伝搬

次章で述べるように，無損失媒質中を伝搬する電磁波では電界と磁界の位相は常に一致しているので，図 1.8 のように電界と磁界が鎖状につながることはない．同図は定性的な説明を示す場合によく用いられるが，電磁波の伝搬を正しく表現していない．

なお，通信工学において登場するマクスウェルの方程式は微分形式が圧倒的に多い．

[**例題** 3]　電束密度 $\boldsymbol{D}$ が $\boldsymbol{D} = (Ax)\,\boldsymbol{i}_x + (Ay)\,\boldsymbol{i}_y + (Az)\,\boldsymbol{i}_z$ [C/m^2] のとき，電荷密度 ρ [C/m^3] を求めよ．

[**解答**]　式 (1.25) から

$$\rho = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 3A \quad [\mathrm{C/m^3}]$$

となる．

1.5　境界条件

媒質定数が異なる媒質が接するとき，境界において電磁界成分が持つ性質を **境界条件** (boundary condition) といい，ある媒質内で成立する界の表現式だけでは解を決定できず，境界条件が必要になる．ここでは，マクスウェルの方程式の積分形を適用することにより境界条件を示す．

(1) 電界の境界条件

図 1.9 のように媒質 1 と媒質 2 の境界に幅 Δw，高さ Δh の長方形の閉路を考え，媒質 1，2 中の電界をそれぞれ $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$ とする．ファラデーの電磁誘導の法則の式 (1.9) において次のように考える．$\Delta h \to 0$ とすると閉路の面積が 0 になるので，右辺の値は 0 になる．単位接線ベクトル $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1 = -\boldsymbol{t}_2$ であるから，

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{t}_1\,\Delta w + \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{t}_2\,\Delta w = \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{t}\,\Delta w + \boldsymbol{E}_2 \cdot (-\boldsymbol{t})\,\Delta w = 0 \tag{1.27}$$

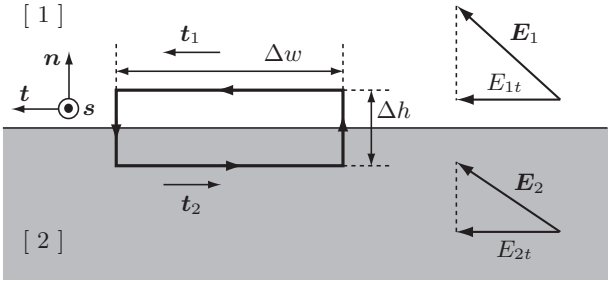


図 1.9　異なる媒質の境界面における電界

となる．中辺の第 1 項 $\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{E}_1$ の接線方向成分であり，E_{1t} と表し，第 2 項も同様に $-E_{2t}$ と表す．従って，電界の接線成分が境界面で連続となる次式の境界条件を満たす．

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{1.28}$$

(2) 電束密度の境界条件

図 1.10 のように，媒質 1 と媒質 2 の境界に底面積 ΔS，高さ Δh の円柱を考え，境界面に面電荷 ρ_{s} [C/m^2] が存在するものとし，媒質 1，2 中の電束密度をそれぞれ $\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_2$ とする．電束密度に関するガウスの法則の式 (1.15) において次のように考える．$\Delta h \to 0$ とすると円柱側面の面積は 0 になるので，左辺において円柱側面からの寄与はなくなる．単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ であるから，

$$\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 \Delta S + \boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 \Delta S = \boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n} \Delta S + \boldsymbol{D}_2 \cdot (-\boldsymbol{n}) \Delta S = \rho_{\mathrm{s}} \Delta S \tag{1.29}$$

が成立する．中辺の第 1 項 $\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{D}_1$ の法線方向成分であり D_{1n} と表し，第 2 項も同様に $-D_{2n}$ と表す．従って，電束密度の境界条件は次式のようになる．

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{\mathrm{s}} \tag{1.30}$$

境界面に面電荷が存在しない場合は電束密度の法線成分が境界面で連続となる次式の境界条件を満たす．

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{1.31}$$

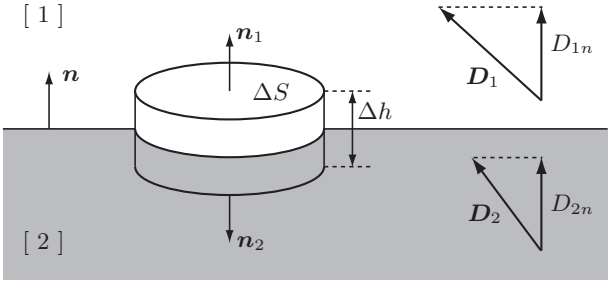


図 1.10　異なる媒質の境界面における電束密度

(3) 磁界の境界条件

図 1.9 に対して 2 種類の媒質中の磁界を $\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$ とし，境界に閉路を考える．拡張されたアンペアの法則 (1.14) を適用して次のように考える．$\Delta h \to 0$ とすると閉路の面積は 0 になるので，一般に右辺の値は 0 になる．しかし，境界面に表面電流が存在する場合，右辺の第 1 項の値が 0 にならず，境界面で

$$\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{t} \Delta w + \boldsymbol{H}_2 \cdot (-\boldsymbol{t}) \Delta w = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{s} \Delta h \Delta w \tag{1.32}$$

が成立する．左辺の第 1 項 $\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{H}_1$ の接線方向成分であり H_{1t} と表し，第 2 項も同様に $-H_{2t}$ と表す．右辺の $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{s}$ は電流密度 $\boldsymbol{J}$ の $\boldsymbol{s}$ 方向成分であり J_s と表す．今，$K = \lim_{\Delta h \to 0} J_s \Delta h$ [A/m] とする **線電流密度** を導入すれば，磁界の境界条件は次式のようになる．

$$H_{1t} - H_{2t} = K \tag{1.33}$$

線電流密度が存在しない場合は磁界の接線成分が境界面で連続となる次式の境界条件を満たす．

$$H_{1t} = H_{2t} \tag{1.34}$$

(4) 磁束密度の境界条件

図 1.10 に対して 2 種類の媒質中の磁束密度を $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ とし，境界に円柱を考える．磁束密度に関するガウスの法則 (1.16) を適用し，電束密度の場合と同じように考えると，磁束密度の法線成分 B_{1n}，B_{2n} が境界面で連続となる次式の境界条件を満たす．

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1.35}$$

第 2 章

平面波

マクスウェルの方程式において，空間中に電流源や電荷が無い場合の最も基本的な解は平面波である．アンテナから十分に距離が離れた場所では，電界と磁界が伝搬方向に直交し，電磁界が平面波として振動しながら伝搬する．本章では，マクスウェルの方程式から波動方程式，ヘルムホルツ方程式を導き，波源が存在しない領域では，正弦波振動する平面電磁波がマクスウェルの方程式の解として与えられることを述べる．

2.1 波動方程式

電磁波を求めるための基本となる **波動方程式** をマクスウェルの方程式から導出する．媒質定数 (ε, μ) が定数である媒質を考えれば，構成方程式は式 (1.3) で表される．このとき，マクスウェルの方程式 (1.23) 〜 (1.26) は

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{2.4}$$

のように表される．式 (2.1)，(2.2) にはそれぞれ電界と磁界の両方の量を含む．この 2 つの式を連立方程式として解けば，電界または磁界だけを含む式が得られる．式 (2.2) の時間 t についての微分

$$\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

を式 (2.1) の回転に代入すると，

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

となる．ここで，ベクトル解析の公式[*1] を用いる．式 (2.3) を考慮して

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho \tag{2.8}$$

[*1] ベクトル $\boldsymbol{A}$ について，次式が成立する (演習問題【 2. 1 】(1) 参照).

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{2.7}$$

が得られる．∇^2 はラプラスの演算子 (Laplacian operator)

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.9}$$

である．磁界に関しては，同様にして

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \boldsymbol{J} \tag{2.10}$$

が得られる．式 (2.8)，(2.10) は波源 $\boldsymbol{J}$，ρ による波動を表す式であり，**ベクトル波動方程式**[*2](vector wave equation) と呼ばれる．これらの式を解くことは容易ではない．本章では，電流源や電荷が存在しない空間における電磁波の伝搬を考えるので，$\boldsymbol{J}_0 = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，$\nabla \times \boldsymbol{J} = \sigma \nabla \times \boldsymbol{E}$ とし，$\rho = 0$ とする．従って，

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0}, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0} \tag{2.11}$$

となる．さらに, 非導電性媒質 (導電率 $\sigma = 0$) で電流が流れない場合には, 同次ベクトル波動方程式 (homogeneous vector wave equation) と呼ばれ，次式のように表される．

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0}, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0} \tag{2.12}$$

2.2　正弦波振動する電磁波

今，電磁界が時間的に正弦波振動しているものとすると，角周波数 ω，時間 t の関数で変化する電磁界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ は大きさと位相で表示する **フェーザ** (phasor) $\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$，$\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})$ を用いて，それぞれ

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\left|\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\right| \mathrm{e}^{j(\omega t + \vartheta_1)}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right] \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\left|\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\right| \mathrm{e}^{j(\omega t + \vartheta_2)}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right] \tag{2.14}$$

のように表される．ここで，$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \left|\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\right| \mathrm{e}^{j\vartheta_1}$，$\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) = \left|\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\right| \mathrm{e}^{j\vartheta_2}$ であり，ϑ_1，ϑ_2 は位相角である．また，$\left|\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\right|$，$\left|\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\right|$ はそれぞれ観測点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ の実効値 (effective value) を示す．本書では，フェーザの大きさとして実効値を用いることにする[*3]．このように，正弦波振動をフェーザにより複素数として表す方法を**フェーザ表示**という．時間微分 $\partial/\partial t = j\omega$ と置き換えれば時間変化因子 $\mathrm{e}^{j\omega t}$ を省略して扱うことができるので，マクスウェルの方程式 (2.1) 〜 (2.4) のフェーザ表示は

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu \dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) \tag{2.15}$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}) + j\omega\varepsilon \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \tag{2.16}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} \tag{2.17}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.18}$$

のように表される．以下では，正弦波振動する物理量の表記を簡単にする慣習に従い，フェーザを表す記号「·」と位置を表す「$(\boldsymbol{r})$」を省略する．式 (2.15)，(2.16) を連立方程式として解き $\dot{\boldsymbol{J}} = \sigma \dot{\boldsymbol{E}}$，$\dot{\rho} = 0$ とすれば，

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + (\omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\sigma)\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{H} + (\omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\sigma)\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0} \tag{2.19}$$

が得られる．この式は **ベクトルヘルムホルツ方程式** (vector Helmholtz equation) と呼ばれ，式 (2.11) の時間変化因子を分離した形になっており，周波数領域での電磁波の振る舞いを知るために用いる．ここで，

$$\dot{k} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\sigma} = \omega\sqrt{\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\mu} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\,\mu}, \qquad \dot{\varepsilon} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \tag{2.20}$$

[*2] 一般に 2 階の空間微分と 2 階の時間微分を結びつける偏微分方程式が波動方程式である．

[*3] フェーザの大きさとして，波高値 $\sqrt{2}\left|\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\right|$，$\sqrt{2}\left|\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\right|$ を用いた書籍も多い．

と置くと，複素数 $\dot{k}$ は **波数** (wave number) と呼ばれ，$\dot{\varepsilon}$ は **複素誘電率** であり，次式のように表すことができる．

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \dot{k}^2 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{H} + \dot{k}^2 \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0} \tag{2.21}$$

2.3　ポインティング電力

ある観測点 $\boldsymbol{r}$，時刻 t におけるベクトル積 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ の流出，すなわち発散を考えてみる．ベクトル解析の公式[*4] を用いると

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{2.23}$$

が得られる．マクスウェルの方程式 (1.23)，(1.24) を代入すると，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{H} \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) - \boldsymbol{E} \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \\ &= -\boldsymbol{E} \cdot \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{H} \cdot \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \sigma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon |\boldsymbol{E}|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu |\boldsymbol{H}|^2 \right) - \sigma |\boldsymbol{E}|^2 \end{aligned} \tag{2.24}$$

となり[*5]，任意の領域 V について体積分すると，

$$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \, \mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, \mathrm{d}V - P_J \tag{2.25}$$

となる．但し，電磁界のエネルギー密度 u は電界のエネルギー u_e と磁界のエネルギー u_m の和

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2} \varepsilon |\boldsymbol{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\boldsymbol{H}|^2 \quad [\mathrm{J/m^3}] \tag{2.26}$$

で与えられ[*6]，ジュール熱損失が

$$P_J = \int_V \sigma |\boldsymbol{E}|^2 \mathrm{d}V \quad [\mathrm{W}] \tag{2.27}$$

で与えられる．さらに，式 (1.18) のガウスの積分定理より次式のように表される．

$$\int_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, \mathrm{d}V - P_J \tag{2.28}$$

式 (2.28) の右辺の第 1 項は領域 V 内で単位時間当たりの電磁界エネルギーの減少量を表し，第 2 項はジュール熱損失による減少量を表しているので，左辺は表面 S から流出する単位時間当たりのエネルギーを表していることになる．$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ は **ポインティングベクトル** (Poynting vector) といい，単位時間に単位面積当たりの電力密度を表していると考えることができる．電磁界が角周波数 ω で時間的に正弦波振動している場合，ポインティングベクトルは周期 T にわたり平均した値が用いられ，式 (2.13)，(2.14) から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{E}(t) \times \boldsymbol{H}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{Re} \left[\sqrt{2} \boldsymbol{E} \mathrm{e}^{j\omega t} \right] \times \mathrm{Re} \left[\sqrt{2} \boldsymbol{H} \mathrm{e}^{j\omega t} \right] \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{Re} \left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \right] \quad [\mathrm{W/m^2}] \end{aligned} \tag{2.29}$$

のように実効値を大きさとするフェーザを用いて表され (演習問題【 2. 3 】参照)[*7]，**ポインティング電力** (Poynting power) と呼ばれる．図 2.1 に示すように，その伝搬方向は $\boldsymbol{E}$ から $\boldsymbol{H}$ に右ねじを回転したときのねじの進む方向である．

[*4] ベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ について，次式が成立する (演習問題【 2. 1 】(2) 参照)．

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{2.22}$$

[*5] $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})' = \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}' = 2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}'$ より $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}' = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})'/2 = \left(|\boldsymbol{A}|^2 \right)'/2$ である．

[*6] 誘電率が ε，透磁率が μ である無損失の媒質は高周波域では，等価的にインダクタンスとキャパシタンスが分布する分布定数回路として扱うことができる．そこで，コンデンサとコイルに蓄えられるエネルギーから式 (2.26) を求めることができる (演習問題【 2. 2 】参照)．なお，分布定数回路については 3.1 節で説明する．

[*7] $\mathrm{Re}[x] = (x + x^*)/2$ を使って導出する．フェーザの大きさとして波高値を用いた場合は $\boldsymbol{P} = \mathrm{Re} \left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \right]/2 \ [\mathrm{W/m^2}]$ となる．

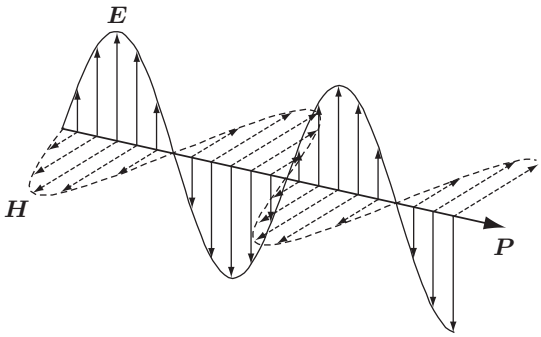


図 2.1　平面波の伝搬とポインティング電力の方向

2.4　平面波の伝搬

(1) 無損失電体中の場合

まず，真空中を伝搬する電磁波を考える．電磁波の伝搬方向を z 軸に取り，電界は $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}_x E_x$ のように x 成分のみ有し，x 軸，y 軸方向の変化はなく一定とすると，ヘルムホルツ方程式 (2.21) は

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_x}{\mathrm{d}z^2} + \dot{k}^2 E_x = 0 \tag{2.30}$$

と表される．真空中では $\varepsilon = \varepsilon_0$，$\mu = \mu_0$，$\sigma = 0$ であるから，式 (2.20) の波数 $\dot{k}$ は実数であり，

$$\dot{k} = k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \tag{2.31}$$

のように与えられる．式 (2.30) の解は次式のように与えられる．

$$E_x(z) = E_1\,\mathrm{e}^{-jk_0 z} + E_2\,\mathrm{e}^{jk_0 z} \tag{2.32}$$

電界 E_x が求められると，マクスウェルの方程式 (2.15) から

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{H} \tag{2.33}$$

のようになり，磁界は y 成分のみ有し，

$$H_y(z) = \frac{1}{-j\omega\mu_0}\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}z} = \frac{k_0}{\omega\mu_0}\left(E_1 \mathrm{e}^{-jk_0 z} - E_2 \mathrm{e}^{jk_0 z}\right) \tag{2.34}$$

となる．式 (2.31) から

$$H_y(z) = \frac{1}{Z_0}\left(E_1 \mathrm{e}^{-jk_0 z} - E_2 \mathrm{e}^{jk_0 z}\right) = H_1 \mathrm{e}^{-jk_0 z} - H_2 \mathrm{e}^{jk_0 z} \tag{2.35}$$

となる．但し，Z_0 は抵抗の単位をもち，真空中の場合，自由空間中の**波動インピーダンス** (wave impedance) または **固有インピーダンス** (intrinsic impedance) と慣用的に呼ばれ，

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{10^{-9}/(36\pi)}} = 120\pi \quad [\Omega] \tag{2.36}$$

のように表される．ある観測点 z において，式 (2.32) の電界と式 (2.35) の磁界は伝搬方向の z 軸と垂直な横断面上で位相が一定となっている．このように等位相面が平面である電磁波を **平面波** (plane wave) と呼ぶ．特に，x-y 平面にのみ存在し，伝搬方向に成分を持たない波を TEM **波** (transverse electromagnetic wave) という．

式 (2.32)，(2.35) から電界と磁界の右辺の第 1 項は

$$E_x(z) = E_1 \mathrm{e}^{-jk_0 z}, \qquad H_y(z) = \frac{E_1}{Z_0}\mathrm{e}^{-jk_0 z} = H_1 \mathrm{e}^{-jk_0 z} \tag{2.37}$$

である．$E_1 = |E_1|\,\mathrm{e}^{j\vartheta}$ (ϑ は位相角) であるから，瞬時値は

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,E_x(z)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}\,|E_1|\cos(\omega t - k_0 z + \vartheta) \tag{2.38}$$

$$H_y(z,t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,H_y(z)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}\,\frac{|E_1|}{Z_0}\cos(\omega t - k_0 z + \vartheta) \tag{2.39}$$

のように与えられ，正弦波である．これらの波の速度を求めてみる．ある時刻 t に位置 z にある波の瞬時振幅が微小時間 Δt 後に微小距離 Δz だけ移動していると考えると，次式が成立する．

$$\omega(t+\Delta t) - k_0(z+\Delta z) + \vartheta = \omega t - k_0 z + \vartheta \tag{2.40}$$

この式から位置 z の時間変化

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_0} \tag{2.41}$$

が求められる．これが波の速度であり，$\Delta z/\Delta t > 0$ であるから，z 軸の正方向に伝搬する **前進波** (forward wave) であることがわかる．さらに，式 (2.31) を代入し，式 (1.6) から

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c \quad [\mathrm{m/s}] \tag{2.42}$$

のように光速 c となる．次に，波長 λ_0 [m] を求めてみる．時刻 $t = 0$ における位相角 $\vartheta = 0$ の電界分布は $E_x(z,0) = \sqrt{2}\,|E_1|\cos(k_0 z)$ であり，位相が一周期 $k_0 z = 2\pi$ となる距離 z が波長 λ_0 であるから，

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{f} \quad [\mathrm{m}] \tag{2.43}$$

となる．この式から k_0 は

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad [\mathrm{rad/m}] \tag{2.44}$$

と表すこともでき，単位長さ当たりの位相推移を表すので **位相定数** (phase constant)，あるいは 2π 当たりの波の数を表すので波数と呼ばれる．従って，式 (2.38), (2.39) から作られる平面波は，波長 λ_0 の正弦波が速度 c で z 軸の正方向に伝搬する．ある時刻 t における平面波の電界と磁界分布を示したのが図 2.2 である．式 (2.32), (2.35) の右辺の第 2 項は同様に，同じ速度 c で z 軸の負方向に伝搬する **後退波** (backward wave) を表している．

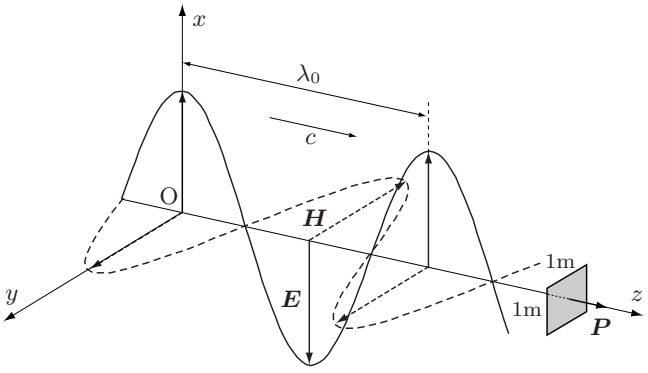


図 2.2　平面波の電界と磁界の瞬時値の分布

次に，比誘電率 ε_r，比透磁率 μ_r の無損失誘電体中を伝搬する平面波について考える．媒質定数は $\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0$, $\mu = \mu_\mathrm{r}\mu_0$, $\sigma = 0$ のように表され，ε_r は 1 より大きい定数，μ_r はほぼ 1 である．誘電体中の波数 k を用いて，式 (2.37) を書き換えると，誘電体中を伝搬する平面波は

$$E_x(z) = E_1\mathrm{e}^{-jkz}, \qquad H_y(z) = \frac{E_1}{Z}\mathrm{e}^{-jkz} = H_1\mathrm{e}^{-jkz} \tag{2.45}$$

のように表される．Z は誘電体の波動インピーダンスであり，

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_{\rm r}}{\varepsilon_{\rm r}}} Z_0 \quad [\Omega] \tag{2.46}$$

のように表される．誘電体中の波数 k は

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [\mathrm{rad/m}] \tag{2.47}$$

となる．伝搬速度 v は真空中の速度 c を用いて，

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\rm r}\mu_{\rm r}}} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{2.48}$$

であり，波長 λ は

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{v}{f} \quad [\mathrm{m}] \tag{2.49}$$

のように表される．なお，光学では真空中の光速 c と媒質中の速度 v との比で与えられる **屈折率** (refractive index) $n = c/v = \sqrt{\varepsilon_{\rm r}\mu_{\rm r}}$ がよく用いられる．式 (2.29) のポインティング電力は式 (2.45) を用いて，

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\right] = \boldsymbol{i}_z P_z, \qquad P_z = \mathrm{Re}\left[E_x(z) H_y^*(z)\right] = \frac{|E_1|^2}{Z} \quad [\mathrm{W/m^2}] \tag{2.50}$$

となる[*8]．式 (2.26) の電磁界のエネルギー密度は $H_1 = E_1/Z$ により $u = \varepsilon |E_1|^2$ [J/m^3] となるので，伝搬方向のポインティング電力は次式のように表すことができる．

$$P_z = \varepsilon |E_1|^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = u\, v \quad [\mathrm{W/m^2}] \tag{2.52}$$

P_z は平面波のエネルギー密度 u に伝搬速度 v をかけたものであり，図 2.2 に示すように，伝搬方向に垂直な 1 [m^2] の面積を考えると，この断面を通過する電力 $W = P_z \times 1$ [W] と電磁界のエネルギー $U = u \times 1$ [J/m] には，次式が成立することがわかる．

$$W = Uv \tag{2.53}$$

すなわち，電磁波によって，電磁界のエネルギーが速度 v [m/s] で運ばれていることがわかる．

[**例題** 1]　周波数 $f = 20$ [MHz] の平面波が比誘電率 $\varepsilon_{\rm r} = 3$，比透磁率 $\mu_{\rm r} = 3$ の媒質中を伝搬しているとする．この媒質の (1) 屈折率 n の値，媒質中を伝搬している平面波の (2) 伝搬速度 v，(3) 波長 λ，(4) 波数 k，(5) 波動インピーダンス Z の値を求めよ．

[**解答**]

(1)　屈折率 $n = \sqrt{\varepsilon_{\rm r}\mu_{\rm r}} = 3$ となる．

(2)　伝搬速度 $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3.0 \times 10^8}{3} = 1.0 \times 10^8$ [m/s] となる．

(3)　波長 $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{1.0 \times 10^8}{20 \times 10^6} = 5$ [m] となる．

(4)　波数 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{5} = 0.4\pi$ [rad/m] となる．

(5)　波動インピーダンス $Z = \sqrt{\dfrac{\mu_{\rm r}}{\varepsilon_{\rm r}}} Z_0 = 120\pi$ [Ω] となる．

[*8] $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}_x E_x + \boldsymbol{i}_y E_y + \boldsymbol{i}_z E_z$，$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}_x H_x + \boldsymbol{i}_y H_y + \boldsymbol{i}_z H_z$ の場合，ベクトル積は次のようになる．

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x^* & H_y^* & H_z^* \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}_x \left(E_y H_z^* - E_z H_y^*\right) + \boldsymbol{i}_y \left(E_z H_x^* - E_x H_z^*\right) + \boldsymbol{i}_z \left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) \tag{2.51}$$

[**例題** 2] 例題 1 の平面電磁波は

$$E_x(z) = E_1 \exp(-jkz), \qquad E_y(z) = E_z(z) = 0$$
$$H_y(z) = H_1 \exp(-jkz), \qquad H_x(z) = H_z(z) = 0, \qquad H_1 = E_1/Z$$

で表され，z 軸の正方向に伝搬している．電界の実効値 $|E_1| = 3$ [V/m] であるとき，(1) 磁界の実効値 $|H_1|$，(2) 伝搬方向のポインティング電力の値，(3) z 軸に垂直面内の半径が 3 [m] の円内を通過する電力の値を求めよ．

[**解答**]

(1) 磁界の実効値は $|H_1| = \dfrac{|E_1|}{Z} = \dfrac{3}{120\pi} = \dfrac{1}{40\pi} \approx 7.96$ [mA/m] となる．

(2) ポインティング電力は $P_z = \dfrac{|E_1|^2}{Z} = \dfrac{3^2}{120\pi} = \dfrac{3}{40\pi} \approx 23.9$ [mW/m^2] となる．

(3) 電力は $W = P_z \times \pi a^2 = \dfrac{3}{40\pi} \times \pi 3^2 = \dfrac{27}{40} = 675$ [mW] となる．

(2) 損失誘電体中の場合

導電率 σ が有限な値を持つ損失誘電体中を伝搬する平面波を考える．式 (2.20) の波数 $\dot{k}$ を用いて，式 (2.45) を書き換えると，損失誘電体中を伝搬する平面波は

$$E_x(z) = E_1 \mathrm{e}^{-j\dot{k}z}, \qquad H_y(z) = \frac{E_1}{\dot{Z}} \mathrm{e}^{-j\dot{k}z} = H_1 \mathrm{e}^{-j\dot{k}z} \tag{2.54}$$

のように表され，波動インピーダンス $\dot{Z}$ は

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\dot{\varepsilon}}} \quad [\Omega] \tag{2.55}$$

であり，複素数で表される．波数 $\dot{k}$ について，

$$\dot{k} = \beta - j\alpha \tag{2.56}$$

と置くと，式 (2.20) から

$$\dot{k}^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - j\omega\mu\sigma = \beta^2 - \alpha^2 - j2\alpha\beta \tag{2.57}$$

が成立する．この式を解くと[*9]，

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \quad [\mathrm{Np/m}], \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} \quad [\mathrm{rad/m}] \tag{2.58}$$

が求められ，α は **減衰定数** (attenuation constant)，β は **位相定数** (phase constant) である．損失誘電体中の電磁界は α，β を用いて，次式のように表される．

$$E_x(z) = E_1 \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-j\beta z}, \qquad H_y(z) = \frac{E_1}{\dot{Z}} \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-j\beta z} = H_1 \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-j\beta z} \tag{2.59}$$

式 (2.58) 中の $\sigma/(\omega\varepsilon)$ は媒質中の導電電流密度 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ と変位電流密度 $\boldsymbol{J}_\mathrm{D} = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$ の比の大きさ $|\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}_\mathrm{D}|$ を表しており，

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{2.60}$$

と書いて，**誘電正接** または **損失係数**という．$\tan\delta$ は媒質にどの程度，損失があるか，どの程度，導体に近い性質を持つかの指標として用いられる．$\tan\delta \ll 1$ の場合，変位電流が大きく，損失が十分小さい誘電体を示し，減

[*9] 連立方程式 $\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\varepsilon\mu$，$2\alpha\beta = \omega\mu\sigma$ を解く．

衰定数 α，位相定数 β は次式のように表される[*10]．

$$\alpha \approx \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad \beta = \frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha} \approx \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{2.61}$$

$\tan\delta \gg 1$ の場合，導電電流が大きく，金属のような良導体を示し，

$$\alpha = \beta \approx \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{2.62}$$

のように表され，減衰定数と位相定数の値が等しくなる．式 (2.20) の複素誘電率 $\dot{\varepsilon}$ を用いて，良導体のインピーダンス $\dot{Z} = R_s + jX_s$ は

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\left(1 - j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}} \approx \sqrt{j\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad [\Omega] \tag{2.63}$$

となり[*11]，実数部である抵抗分 R_s を **表面抵抗** (surface resistance) という．式 (2.59) から $H_1 = E_1/\dot{Z}$ であり，良導体の中では，磁界は電界より 45° 位相が遅れることがわかる．無損失誘電体中の場合と同様に求めると，伝搬速度，波長はそれぞれ

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{2.64}$$

である．

[**例題** 3] 海水のような導電率が大きい媒質では，周波数が高いときは誘電体，低いときは導体として扱う．海水の導電率 $\sigma = 4$ [S/m]，比誘電率 $\varepsilon/\varepsilon_0 = 80$ のとき，境界となる周波数を求めよ．

[**解答**] 式 (2.60) より $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1$ が境界となる周波数であるから，

$$f = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon} = \frac{4}{2\pi \times 80 \times 10^{-9}/(36\pi)} = 9 \times 10^8 = 900 \quad [\mathrm{MHz}]$$

が得られる．

周波数 100 [MHz] の平面波に対して，導電率 $\sigma = 6.10 \times 10^7$ [S/m]，比透磁率 $\mu_\mathrm{r} = 1$ の銀は $\sigma/(\omega\varepsilon) \gg 1$ を満たす良導体であり，式 (2.64) より銀中で伝搬速度 $v \approx 4.05 \times 10^3$ [m/s]，波長 $\lambda \approx 0.0405$ [mm] となる．このように，金属中の伝搬速度と波長は真空中の値に比べて極めて小さい．式 (2.62) から減衰定数は $\alpha \approx 15.5 \times 10^4$ [Np/m] となり極めて大きい．それゆえ，電波は金属中では，数ミクロンのうちにほとんど無くなるくらいに減衰する．

導電性媒質では，ごく一部の電波が減衰しながら，媒質内に入り込む．その内部へ侵入した電波の減衰の度合を求めてみる．媒質内の電磁波は式 (2.59) で与えられるように，電界，磁界共にその振幅強度は $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ の形で減衰する．電界および磁界の振幅強度が $\alpha\,\delta_\mathrm{s} = 1$ のところで表面の値の $1/\mathrm{e}$，すなわち約 36.8 [%] になるような δ_s の値を **表皮の深さ** (skin depth) または**侵入の深さ** (depth of penetration) と呼ばれている．今，良導体の場合を考えると，表皮の深さ δ_s は式 (2.62) から

$$\delta_\mathrm{s} = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad [\mathrm{m}] \tag{2.65}$$

となる．表 2.1 は良導体の条件を満たす導電性媒質に対する表皮の深さ δ_s である．表中括弧内の数値は参考値であり，良導体の条件 $\sigma/(\omega\varepsilon) \gg 1$ を満たしていない．

[*10] マクローリン展開すると $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 + \cdots$ となる．$|x| \ll 1$ のとき，2 次以降の項は微小量であるとみなすと，$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ のように近似できる．この近似式を用いて，式 (2.58) を変形する．

[*11] $\sqrt{j} = \sqrt{\mathrm{e}^{j\pi/2}} = \mathrm{e}^{j\pi/4}$ を使う．